

# Module und Gerüste

Michael Eiermann\*

Die Module, aus denen Tobias Stengel seine Installationen aufbaut, sind „über Ecken und Kanten abgerollte Würfel“. So entstehen zweidimensionale Darstellungen des dreidimensionalen Würfels, die sich im einfachsten Fall, wenn nämlich nur „über Kanten abgerollt“ wird, auch anders erzeugen lassen: Schneidet man sieben der zwölf Kanten eines Würfels auf, so können die sechs Quadrate, die zusammen die Oberfläche des Würfels bilden, u.U. in eine Ebene aufgeklappt werden (vgl. Abb. 1). Eine andere Wahl der sieben Schnittkanten kann (muss aber nicht) zu einem unterschiedlichen „Schnittmuster“ für den Würfel führen.

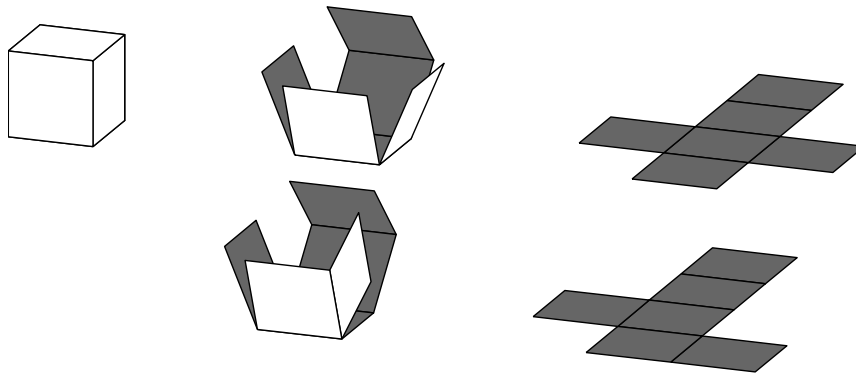


Abb. 1: Zwei Wege, den Würfel in die Ebene aufzuklappen

Tobias Stengel zeigt, dass es elf verschiedene Möglichkeiten gibt, den Würfel ins Zweidimensionale aufzufalten (vgl. Abb. 2). Wir werden versuchen, seine Konstruktion mit Hilfsmitteln der *Graphentheorie* zu analysieren, einer mathematischen „Theorie der reinen Verbindungen“ (theory of pure colligation) wie sie James Joseph Sylvester 1878 [6] nannte, der auch den mathematischen Begriff „Graph“ prägte. Inspiriert wurde er durch chemische Strukturformeln, wo man die Atome eines Moleküls durch Buchstaben und ihre Bindung durch Striche darstellt.<sup>1</sup> Sylvester erkannte, dass

\*eiermann@math.tu-freiberg.de

<sup>1</sup>Friedrich August Kekulé von Stradonitz, einer der Begründer der Strukturlehre, studierte zunächst Architektur. Seine Strukturlehre basiert nach eigenen Angaben auf „architektonischen Prinzipien“.

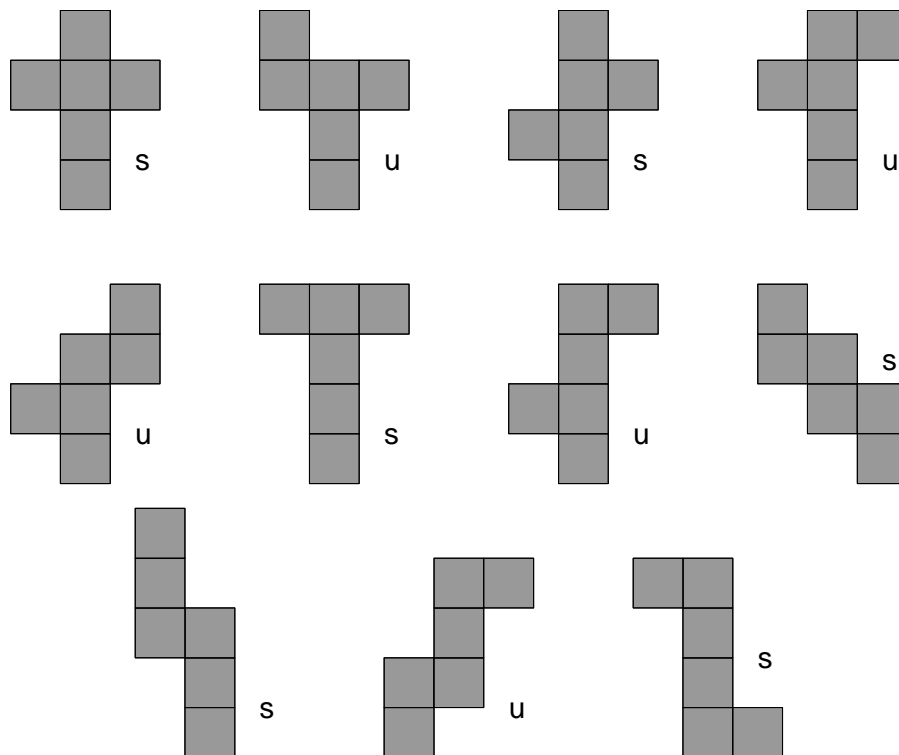


Abb. 2: Die elf Grundmodule von Tobias Stengel

man durch eine mathematische Struktur, die aus abstrakten Objekten besteht, zwischen denen abstrakte Beziehungen bestehen können (eben einen Graphen), sehr viel mehr beschreiben kann als chemische Moleküle.

Schon dreißig Jahre zuvor hatte Gustav Robert Kirchhoff grundlegende Aussagen über Graphen bewiesen, obwohl er sich nicht für Graphen als mathematische Objekte interessierte. Er untersuchte elektrische Netzwerke, d.h. Systeme von Drähten, die untereinander verbunden sind. Die beiden Kirchhoffschen Regeln zur Berechnung der Strom- und Spannungsverhältnisse in solchen Systemen (die erste lautet z.B. „Die Summe der ankommenden Ströme ist in jedem Punkt des Leitersystems gleich der Summe der abfließenden Ströme“) wurden i.w. mit graphentheoretischen Methoden gezeigt [2]. Sein Matrix-Gerüst-Satz [3] deckte bereits 1847 den engen Zusammenhang zwischen Graphen- und *Matrizentheorie* auf, der hier eine wichtige Rolle spielen wird.

Schließlich wird auch das *Isomorphieproblem* bei Graphen zur Sprache kommen, mit dem sich Arthur Cayley ebenfalls in der Mitte des 19. Jahrhunderts erstmals auseinandersetzte (vgl. [5]). Cayley stieß auf diese Frage bei der Untersuchung isomerer Kohlenwasserstoffe (die in ihrer Bruttozu-

sammensetzung zwar identisch, in ihrer Struktur aber verschieden sind).

Obwohl sich diese Annäherung an die Grundmodule Tobias Stengels nicht an Mathematiker richtet, folgt sie in Aufbau und Stil einer mathematischen Arbeit. Das bedeutet, dass sie nach dem üblichen Definition-Satz-Beweis-Beispiel-Schema gegliedert ist, dass Worte und Phrasen (wie „insbesondere“, „genau dann, wenn“, „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ etc.) verwendet werden, die außerhalb mathematischer Texte wohl ausgestorben sind, und — vor allem — dass mit mathematischen Formeln argumentiert wird. Bei dem Versuch, trotzdem verständlich zu bleiben, waren an einigen Stellen (leichte) „Verbiegungen der mathematischen Exaktheit“ unvermeidlich. Dies sollte den Zweck der folgenden Bemerkungen nicht beeinträchtigen, nämlich zu zeigen, dass die Auseinandersetzung Tobias Stengels mit den Modulen des Würfels Relationen und Strukturen offenlegt, die grundlegender sind als ihre „augenscheinlichen“ geometrischen Beziehungen.

Die Begriffe, die im ersten Abschnitt vorgestellt werden, sind zum Verständnis dieser Zusammenhänge unbedingt erforderlich. Die anschließenden drei Kapitel sind sicherlich nicht einfach zu lesen: Wir diskutieren zuerst elementare Eigenschaften spezieller Graphen, sog. Gerüste, und stellen eine Verbindung zwischen ihnen und den Grundmodulen von Tobias Stengel her (an dieser Stelle wird der einzige Beweis dieser Arbeit präsentiert). Im vierten Paragraph wird mit dem Matrix-Gerüst-Satz von Kirchhoff ein Hilfsmittel bereitgestellt, mit dem die Anzahl der Gerüste eines Graphen bestimmt werden kann. Dazu sind weitere Begriffe, wie Matrix und Determinante, unabdingbar. Schließlich muss im fünften Abschnitt geklärt werden, wann Gerüste isomorph, d.h. „im wesentlichen gleich“ sind, und wie man „grundsätzlich verschiedene“ Gerüste erkennt. Am Ende steht das Ergebnis, dass die elf Grundmodule genau den elf Isomorphieklassen von Gerüsten des Würfelgraphen entsprechen. Das letzte Kapitel skizziert analoge Resultate für den vierdimensionalen Würfel.

## 1 Begriffe aus der Graphentheorie

Ein *Graph*  $G = (E, K)$  besteht aus einer *Eckenmenge*  $E$  und einer *Kantenmenge*  $K$ . Die Elemente aus  $E$ , also die *Ecken* von  $G$ , werden von 1 bis  $n$  durchnummeriert:  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  (wir betrachten ausschließlich Graphen mit endlich vielen Ecken und identifizieren diese mit ihren Indices, schreiben also einfach  $i$  statt  $e_i$ ). Auch die Elemente der Kantenmenge, die *Kanten* von  $G$ , werden nummeriert:  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ . Jede Kante  $k_\ell$  verbindet zwei Ecken von  $E$ , etwa  $i$  und  $j$ . Es ist deshalb üblich, eine Kante durch die Angabe ihrer Endecken zu beschreiben:  $k_\ell = [i, j]$ .

Wir werden hier nur *ungerichtete* Graphen betrachten, was bedeutet, dass die Kanten keine Orientierung besitzen oder, äquivalent, dass wir die

Kanten  $[i, j]$  und  $[j, i]$  nicht unterscheiden. Wir erlauben keine Kanten der Form  $[i, i]$ , die eine Ecke mit sich selbst verbinden. Außerdem verbieten wir mehrfache Kanten zwischen zwei Ecken: Zwei Ecken eines Graphen sind also entweder gar nicht oder durch genau eine Kante verbunden.

Diese und weitere Begriffe werden stets am Beispiel des dreidimensionalen Würfels veranschaulicht (vgl. Abb. 3), der offenbar als Graph  $W_3 = (E_3, K_3)$  mit  $n = 8$  Ecken und  $m = 12$  Kanten aufgefasst werden kann:

$$E_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$K_3 = \{[1, 2], [1, 3], [1, 5], [2, 4], [2, 6], [3, 4], [3, 7], [4, 8], [5, 6], [5, 7], [6, 8], [7, 8]\}.$$

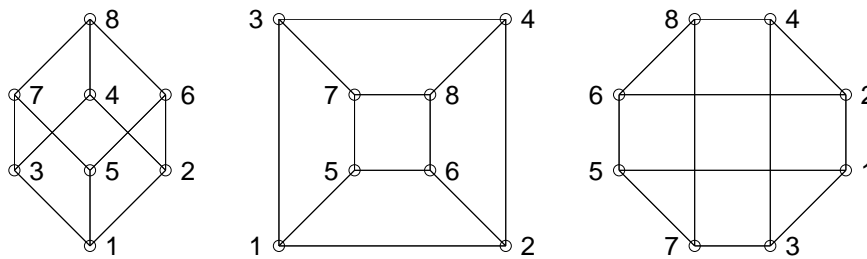


Abb. 3: Drei Darstellungen des Würfels  $W_3$

Ein Graph beschreibt ausschließlich ein abstraktes Beziehungsgeflecht zwischen seinen Ecken: Entweder stehen zwei Ecken,  $i$  und  $j$ , zueinander in Beziehung (nämlich wenn  $[i, j]$  zur Kantenmenge gehört) oder nicht (wenn  $[i, j]$  nicht zur Kantenmenge gehört). Weitergehende „geometrische“ Informationen, wie etwa die genaue Lage der Ecken, die Länge der Kanten oder auch die Größe der Winkel, die von zwei Kanten eingeschlossen werden, kann man einem Graphen nicht entnehmen. *Zwei Graphen sind gleich, wenn ihre Ecken- und Kantenmengen übereinstimmen.* Es gibt verschiedene *Darstellungen* eines Graphen, so repräsentieren die drei Darstellungen in Abb. 3 alle denselben Graphen, nämlich den dreidimensionalen Würfel  $W_3$ . Der Gleichheitsbegriff bei Graphen wird in Abschnitt 4 detaillierter diskutiert.

Durch die Wahl einer Teilmenge  $K'$  der Kantenmenge  $K$  eines Graphen  $G$  erhält man einen *Teilgraphen*  $T = (E', K')$  von  $G$ . Die Eckenmenge  $E'$  von  $T$  besteht aus allen Ecken von  $E$ , die Enden einer Kante aus  $K'$  sind. Abb. 4 zeigt sechs Teilgraphen des  $W_3$  (die durchgezogenen Linien repräsentieren die Kanten des Teilgraphen), anhand derer wir weitere Begriffe veranschaulichen werden.

$T_1$  besteht etwa aus allen acht Ecken des  $W_3$ , enthält aber nur die Kanten  $[1, 5]$ ,  $[2, 6]$ ,  $[3, 7]$  und  $[4, 8]$ . Ein Graph  $G$  heißt *zusammenhängend*, wenn jede Ecke von  $G$  über einen Kantenzug aus  $G$  von jeder anderen Ecke von

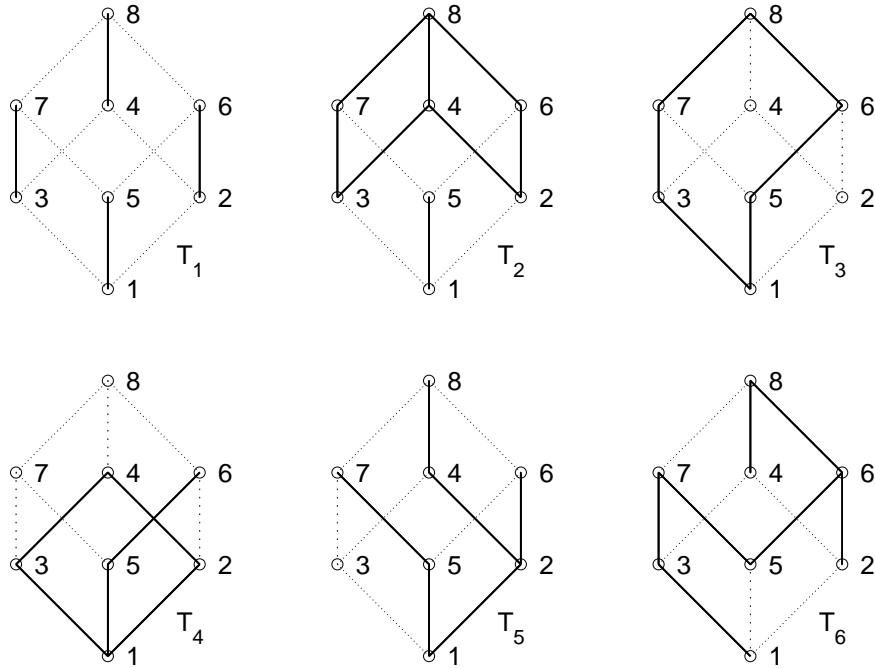


Abb. 4: Sechs Teilgraphen des  $W_3$

$G$  aus erreichbar ist.  $T_1$  und  $T_2$  sind nicht zusammenhängend, denn in beiden Fällen ist 4 nicht von 1 aus erreichbar.  $T_3$  ist ein *Kreis*, denn man kann seine Kanten so anordnen, dass sie alle Ecken von  $T_3$  durchlaufen, wobei Ausgangs- und Endecke gleich sind und jede andere Ecke genau einmal passiert wird. Beispielsweise ist  $[1, 3], [3, 7], [7, 8], [8, 6], [6, 5], [5, 1]$  eine solche Anordnung der Kanten von  $T_3$  mit Anfangs- und Endpunkt 1.  $T_4$  ist offenbar kein Kreis, enthält mit  $[1, 2], [2, 4], [4, 3], [3, 1]$  aber einen Kreis der Länge 4 (die Länge ist die Anzahl der beteiligten Kanten).  $T_5$  und  $T_6$  sind dagegen *kreisfrei*. Solche Teilgraphen werden *Bäume* genannt, wenn sie zusätzlich zusammenhängend sind. Schließlich heißt ein Teilgraph  $T$  ein *Gerüst von  $G$* , wenn er ein Baum ist und alle Ecken von  $G$  umfasst.  $T_6$  ist also ein Gerüst des Würfels  $W_3$ , während bei  $T_5$  die dritte Ecke „fehlt“.

Wir fassen die Eigenschaft dieser sechs Graphen zusammen:

	zusammenhängend	kreisfrei	Baum	Gerüst
$T_1$	–	+	–	–
$T_2$	–	–	–	–
$T_3$	+	–	–	–
$T_4$	+	–	–	–
$T_5$	+	+	+	–
$T_6$	+	+	+	+

Ist ein Graph  $G$  nicht zusammenhängend, so kann man ihn in zusammenhängende Teilgraphen zerlegen, von denen keine zwei eine gemeinsame Ecke besitzen. Man nennt diese Teilgraphen die *Komponenten* von  $G$ . So besitzt  $T_1$  vier Komponenten mit den Ecken  $\{1, 5\}$ ,  $\{2, 6\}$ ,  $\{3, 7\}$  bzw.  $\{4, 8\}$ , während  $T_2$  nur aus zwei Komponenten besteht ( $\{1, 5\}$  und  $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ ).

## 2 Gerüste

Bevor wir auf die Verbindung zwischen den Modulen von Tobias Stengel und den Gerüsten des Würfels  $W_3$  eingehen können, benötigen wir zwei wichtige Eigenschaften von Gerüsten, die von der Anschauung her sofort einleuchten, aber natürlich trotzdem bewiesen werden müssen (vgl. dazu F. Kaderali und W. Poguntke [1, S. 29 ff.]).

**Satz 1.** *Jeder zusammenhängende Graph besitzt (mindestens) ein Gerüst.*

Der Graph  $T_6$  aus Abb. 4 ist ein Gerüst des Würfels  $W_3$ . Dass er genau sieben Kanten besitzt, ist kein Zufall:

**Satz 2.** *Ist  $G$  ein zusammenhängender Graph mit  $n$  Ecken, so besitzt jedes Gerüst von  $G$  genau  $n - 1$  Kanten.*

*Umgekehrt ist ein Teilgraph von  $G$  immer dann ein Gerüst von  $G$ , wenn er ein Baum ist und genau  $n - 1$  Kanten besitzt.*

Die folgende Aussage erlaubt uns, eine Verbindung zwischen den Grundmodulen und den Gerüsten des  $W_3$  herzustellen. Sie besagt, dass durch das Aufschneiden von sieben Kanten des Würfels zwangsläufig ein Gerüst entsteht, wenn die aufgeschnittenen Kanten keinen Kreis enthalten.

**Satz 3.** *Jeder kreisfreie Teilgraph  $T$  des  $W_3$  mit genau sieben Kanten ist zusammenhängend und damit ein Gerüst des  $W_3$ .*

*Beweis.* Sei  $T$  ein kreisfreier Teilgraph des  $W_3$  mit genau sieben Kanten. Wir nehmen an, dass  $T$  nicht zusammenhängend ist, und werden diese Annahme ad absurdum führen. Die Idee des Beweises lässt sich kurz beschreiben: Ist der Graph  $T$  nicht zusammenhängend, so zerfällt er in mindestens zwei Komponenten. Jede dieser Komponenten muss mindestens eine, darf aber höchstens sechs Kanten enthalten. Wir zeigen nun nacheinander, dass ein siebenkantiger Teilgraph des  $W_3$ , der eine Komponente mit  $k$  Kanten besitzt (dabei ist  $k$  eine ganze Zahl zwischen 1 und 6), zwangsläufig einen Kreis enthält. Die Argumentation wird durch Abb. 5 illustriert.

Erster Fall: Untersuchen wir zunächst den Fall, dass eine dieser Komponenten aus genau *einer* Kante besteht. Nach einer geeigneten Drehung des Würfels können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass es sich hier um die Kante  $[1, 2]$  handelt. Keine seiner Nachbarkanten ( $[1, 3]$ ,  $[1, 5]$ ,  $[2, 4]$ ,  $[2, 6]$ ) kann zu  $T$  gehören, weil sonst die Komponente,

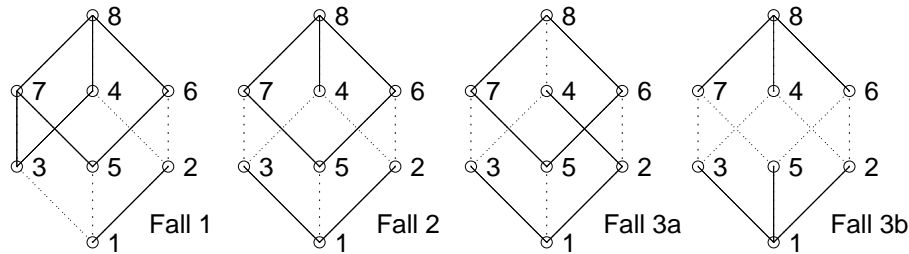


Abb. 5: Zum Beweis von Satz 3

zu der  $[1, 2]$  gehört, noch eine zweite Kante enthalten würde. Von den verbleibenden sieben Kanten des  $W_3$ , nämlich  $[3, 4]$ ,  $[3, 7]$ ,  $[4, 8]$ ,  $[5, 6]$ ,  $[5, 7]$ ,  $[6, 8]$ ,  $[7, 8]$ , gehört genau eine nicht zu  $T$ , denn  $T$  besitzt nach Voraussetzung neben  $[1, 2]$  noch sechs weitere Kanten. Wir werden sofort sehen, dass jede Wahl von sechs dieser sieben Kanten zu einem Teilgraphen  $T$  führt, der einen Kreis enthält — im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes. Jede der Kanten  $[5, 6]$ ,  $[5, 7]$  und  $[6, 8]$  muss zu  $T$  gehören, denn wäre eine von ihnen nicht aus  $T$ , so würde  $T$  mit  $[3, 4]$ ,  $[4, 8]$ ,  $[8, 7]$ ,  $[7, 3]$  einen Kreis enthalten. Aus dem gleichen Grund muss jede der Kanten  $[3, 4]$ ,  $[3, 7]$  und  $[4, 8]$  zu  $T$  gehören (andernfalls enthält  $T$  den Kreis  $[5, 6]$ ,  $[6, 8]$ ,  $[8, 7]$ ,  $[7, 5]$ ). Wir müssen also die Kante  $[7, 8]$  entfernen — aber auch das ist unmöglich, denn die verbleibenden Kanten bilden einen Kreis der Länge sechs:  $[3, 4]$ ,  $[4, 8]$ ,  $[8, 6]$ ,  $[6, 5]$ ,  $[5, 7]$ ,  $[7, 3]$ .

Zweiter Fall: Nehmen wir als nächstes an, dass es eine Komponente von  $T$  mit genau *zwei* Kanten, sagen wir  $[1, 2]$  und  $[1, 3]$ , gibt. Die Nachbarkanten  $[1, 5]$ ,  $[2, 4]$ ,  $[2, 6]$ ,  $[3, 4]$ ,  $[3, 7]$  gehören nicht zu  $T$ . Also gehören die restlichen fünf Kanten,  $[4, 8]$ ,  $[5, 6]$ ,  $[5, 7]$ ,  $[6, 8]$ ,  $[7, 8]$  sämtlich zu  $T$ . Weil sie den Kreis  $[5, 6]$ ,  $[6, 8]$ ,  $[8, 7]$ ,  $[7, 5]$  enthalten, steht auch dies im Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $T$  kreisfrei ist.

Dritter Fall: Die Möglichkeit auszuschließen, dass es eine Komponente mit genau *drei* Kanten gibt, wird dadurch kompliziert, dass zwei prinzipiell verschiedene zusammenhängende Teilgraphen mit drei Kanten existieren (vgl. Abb. 5): Diese drei Kanten liegen entweder in einer Ebene (in einem der Quadrate der Oberfläche des Würfels, wie etwa  $[1, 2]$ ,  $[1, 3]$ ,  $[2, 4]$  (Fall 3a) oder es gibt keine Ebene, die alle drei Kanten umfasst, wie bei  $[1, 2]$ ,  $[1, 3]$ ,  $[1, 5]$  (Fall 3b). Im ersten Fall besitzt die Komponente fünf Nachbarkanten und die verbleibenden vier Kanten, die einen Kreis bilden, müssen sämtlich zu  $T$  gehören. Im zweiten Fall besitzt die Komponente sogar sechs Nachbarkanten und die restlichen drei Kanten reichen zur Konstruktion eines siebenkantigen Graphen nicht aus.

Fall 4: Wir haben bisher gesehen, dass ein kreisfreier Teilgraph des  $W_3$  keine Komponente mit weniger als vier Kanten besitzen kann. Damit kann

er natürlich auch keine Komponente mit  $k = 4$ ,  $k = 5$  oder  $k = 6$  Kanten besitzen, denn die übrigen  $7 - k$  Kanten müssten sich dann auf eine oder mehrere Komponenten mit weniger als vier Kanten verteilen.  $\square$

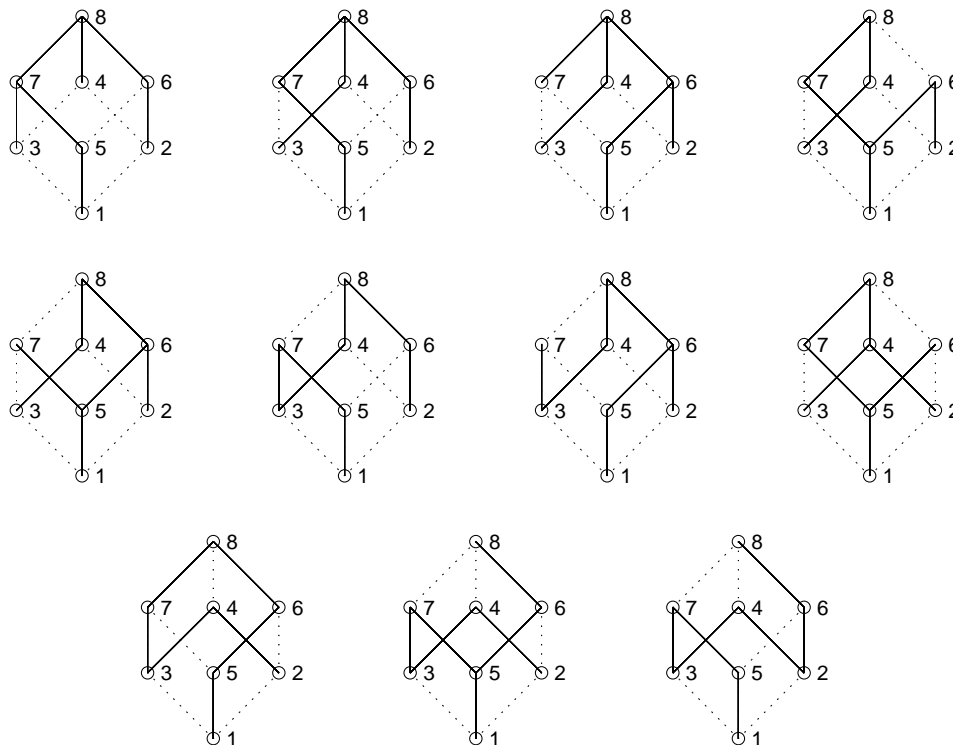


Abb. 6: Die elf Grundmodule von Tobias Stengel als Gerüste des  $W_3$

Mit diesen Hilfsmitteln können wir jetzt zeigen, dass jedem Grundmodul von Tobias Stengel ein Gerüst des  $W_3$  entspricht. Wir haben bereits bemerkt, dass man ein Grundmodul auch erhält, wenn man sieben Kanten des Würfels aufschneidet und danach die Oberflächenquadrate in die Ebene aufklappt. Wir betrachten jetzt die sieben aufgeschnittenen Kanten als einen Teilgraphen  $T$  des  $W_3$ . Natürlich kann man nicht sieben beliebige Kanten aufschneiden, wenn man ein „Schnittmuster“ des Würfels erhalten will. Zum Beispiel muss diese Kantenmenge kreisfrei sein, denn andernfalls würde das aufgeklappte Schnittmuster in mehrere isolierte Teile zerfallen. Mit anderen Worten: der Teilgraph  $T$  muss kreisfrei sein. Weil er genau sieben Kanten enthält, ist er nach Satz 3 ein Gerüst von  $W_3$ . Abb. 6 zeigt noch einmal die Grundmodule — jetzt interpretiert als Gerüste des  $W_3$ .



### 3 Matrizen, Determinanten und der Satz von Kirchhoff

Um die Frage beantworten zu können, wieviele Gerüste ein Graph enthält, sind Aussagen über Matrizen und deren Determinanten erforderlich. Eine quadratische *Matrix* ist ein Zahlentableau, das aus  $n$  Zeilen und genau so vielen Spalten besteht. Man spricht von einer  $n \times n$ -Matrix. Beispielsweise ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

eine  $4 \times 4$ -Matrix. Sie ist die *Adjazenzmatrix* des Graphen  $B$  aus Abb. 7 — das bedeutet erstens, dass die Matrix  $A$  genau so viele Zeilen und Spalten besitzt wie der Graph  $B$  Ecken, und zweitens, dass ihr Eintrag in Zeile  $i$  und Spalte  $j$  gleich 1 ist, wenn  $[i, j]$  zur Kantenmenge von  $B$  gehört — andernfalls ist er 0: Der Eintrag in Zeile 2 und Spalte 3 ist 1, weil  $[2, 3]$  eine Kante von  $B$  ist, in Zeile 2 und Spalte 4 steht 0, weil die Ecken 2 und 4 nicht durch eine Kante verbunden sind. Eine zweite Matrix, die für jeden

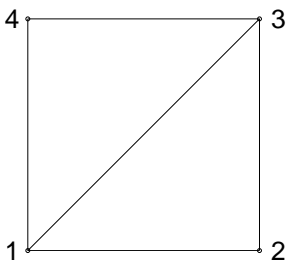


Abb. 7: Der Beispielgraph  $B$

Graphen  $G$  definiert ist, ist die *Kirchhoff-Matrix*  $K$ . Sie besitzt dieselbe Dimension wie die Adjazenzmatrix, also  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten, wenn  $n$  die Anzahl der Ecken von  $G$  ist. Wo in der Adjazenzmatrix eine 1 steht, besitzt die Kirchhoff-Matrix den Eintrag  $-1$ , zusätzlich steht in Zeile  $i$  und Spalte  $i$  (also an den Stellen, wo Zeilen- und Spaltenindex identisch sind) die Anzahl der Kanten, an denen die  $i$ -te Ecke beteiligt ist. Für den Graphen  $B$  bedeutet das

$$K = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die *Determinante* einer Matrix ist ein weiterer Begriff, der zur Formulierung des Kirchhoffschen Resultats benötigt wird: Wir werden hier keine vollständige Definition geben — nur soviel: Die Determinante einer Matrix ist eine Zahl, die in den Fällen, die uns interessieren, durch das *Eliminationsverfahren* berechnet werden kann: Um das zu veranschaulichen, streichen wir die vierte Zeile und Spalte aus der Kirchhoff-Matrix  $K$  unseres Beispielgraphen  $B$ , wodurch die  $3 \times 3$ -Matrix

$$K' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

entsteht. Von dieser Matrix  $K'$  soll jetzt die Determinante berechnet werden: Im ersten Schritt wird durch Addition eines Vielfachen der ersten Zeile zur zweiten und dritten Zeile dafür gesorgt, dass die Einträge in der ersten Spalte (bis auf den ersten) verschwinden. Wir multiplizieren also die erste Zeile  $[3 \ -1 \ -1]$  mit  $1/3$  und addieren das Ergebnis  $[1 \ -1/3 \ -1/3]$  zur zweiten Zeile. Die neue zweite Zeile lautet dann  $[-1 + 1 = 0 \ 2 - 1/3 = 5/3 \ -1 - 1/3 = -4/3]$ . Genauso verfahren wir mit der dritten Zeile:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}.$$

Im zweiten Schritt wird jetzt ein Vielfaches der zweiten Zeile zur dritten addiert mit dem Ziel, den Eintrag in Zeile 3 und Spalte 2 zu annullieren (offenbar ist  $4/5$  der geeignete Faktor):

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{bmatrix}.$$

Alle Einträge im „unteren Teil“ von  $K'$ , d.h. deren Zeilenindex größer ist als ihr Spaltenindex, sind jetzt „vernüllt“ und wir definieren die Determinante  $\det(K')$  von  $K'$  als das Produkt derjenigen Einträge, bei denen Zeilen- und Spaltenindex übereinstimmen. Das bedeutet:

$$\det(K') = 3 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{5} = 8.$$

Die Determinante einer Matrix mit ganzzahligen Einträgen ist selbst wieder eine ganze Zahl, auch wenn dies aus der obigen Definition nicht ohne weiteres abzulesen ist.

Es ist sicherlich überraschend, dass man auf diese Weise die Gerüste eines Graphen abzählen kann:

**Satz 4 (Matrix-Gerüst-Satz von Kirchhoff).** Sei  $G$  ein Graph und  $K$  die zugehörige Kirchhoff-Matrix. Durch Streichen der letzten Zeile und Spalte von  $K$  ergibt sich eine neue Matrix  $K'$ . Dann ist Determinante von  $K'$  identisch mit der Anzahl der Gerüste von  $G$ .

Dieser Satz wird z.B. in [4] bewiesen.

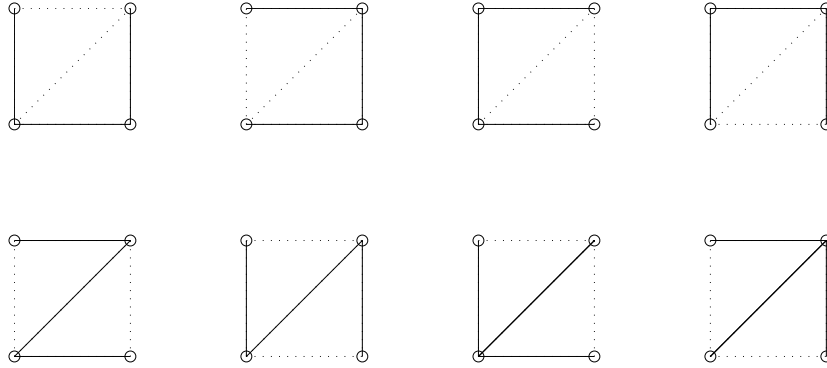


Abb. 8: Die Gerüste des Graphen  $B$

Der Graph  $B$  aus Abb. 7 besitzt also acht Gerüste (vgl. Abb. 8). Betrachten wir jetzt wieder den Würfelgraphen  $W_3$ . Sowohl seine Adjazenzmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

als auch seine Kirchhoff-Matrix

$$K = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

besitzen die Dimension 8. Streicht man aus  $K$  die letzte Zeile und Spalte

und wendet danach das Eliminationsverfahren an, so ergibt sich

$$K' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{8} & -\frac{9}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{38}{15} & -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{112}{57} & -\frac{40}{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{7} \end{bmatrix},$$

also

$$\det(K') = 3 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{21}{8} \cdot \frac{15}{7} \cdot \frac{38}{15} \cdot \frac{112}{57} \cdot \frac{12}{7} = 384.$$

Der Graph  $W_3$  besitzt damit 384 Gerüste.

## 4 Symmetrie und Isomorphismen

Am Ende von Abschnitt 2 konnten wir beweisen, dass jedem der elf Grundmodule von Tobias Stengel ein Gerüst des  $W_3$  entspricht. Jetzt liefert der Matrix-Gerüst-Satz von Kirchhoff die überraschende Aussage, dass der  $W_3$  sehr viel mehr, nämlich 384 Gerüste enthält. Am Beispiel des Graphen  $B$  aus Abb. 7 erkennt man leicht, dass dies nur scheinbar ein Widerspruch ist: Der Satz von Kirchhoff zählt alle acht Gerüste (vgl. Abb. 8), obwohl nur drei davon „wirklich verschieden“ sind. Um „essentiell Verschiedenes“ von „im wesentlichen Gleichen“ zu unterscheiden, benutzt man in der Mathematik den Begriff des *Isomorphismus*: Ein Graphenisomorphismus ist zunächst ei-

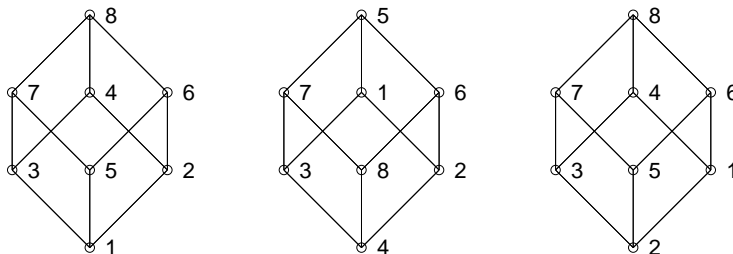


Abb. 9: Isomorphie bei Graphen

ne Ummumerierung (oder Permutation) der Ecken des Graphen: Der erste Graph aus Abb. 9 geht z.B. durch die Ummumerierungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(in der ersten Zeile sind die alten Nummern der Ecken, in der zweiten die neuen Nummern eingetragen) in den zweiten bzw. dritten Graphen über. Außerdem wird von einem Graphenisomorphismus verlangt, dass er *adjazenzertaltend* ist: Die Ecken  $i$  und  $j$  sollen nach der Umnummerierung genau dann durch eine Kante verbunden sein, wenn sie das auch vorher waren. Man prüft leicht nach, dass diese Bedingung von den ersten beiden Graphen erfüllt wird, sie sind *isomorph*. Der dritte Graph enthält aber die Kante  $[2, 5]$ , die in keinem der beiden anderen enthalten ist.

Auch beim Würfel zählt der Satz von Kirchhoff alle verschiedenen Gerüste (zur Erinnerung: zwei Gerüste sind gleich, wenn ihre Kantenmengen übereinstimmen). Es kommt jetzt also darauf an, aus der Menge der 384 Gerüste die isomorphen Kopien herauszufiltern. Die erste Frage lautet, wieviele Isomorphismen der Graph  $W_3$  besitzt. Dazu zählen wir zunächst alle Umnummerierungen von acht Ecken ab (unabhängig davon, ob Adjazenzen erhalten werden oder nicht): Die erste Ecke kann eine der Ziffern  $1, 2, \dots, 8$  als neue Nummer erhalten (acht Möglichkeiten). Diese Nummer darf nicht noch einmal vergeben werden, so dass für die zweite Ecke nur noch sieben mögliche neue Nummern übrig bleiben. Entsprechend gibt es nur noch sechs Möglichkeiten für die dritte Ecke etc. Insgesamt gibt es deshalb

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 40320$$

verschiedene Nummerierungen der acht Ecken des Würfels. Nicht alle davon sind Isomorphismen (also adjazenzertaltend). Mit Hilfe der Adjazenzmatrix kann man entscheiden, ob eine Umnummerierung ein Isomorphismus ist oder nicht.

**Satz 5.** *Sei  $G$  ein Graph mit  $n$  Ecken und Adjazenzmatrix  $A$ . Außerdem sei  $\pi$  irgendeine Umnummerierung dieser Ecken. Wir erzeugen eine neue  $n \times n$ -Matrix  $A'$ , indem wir sowohl die Zeilen als auch die Spalten von  $A$  nach der Vorschrift  $\pi$  umnummerieren. Dann ist  $\pi$  genau dann ein Isomorphismus von  $G$ , wenn  $A = A'$  gilt.*

Wir wollen auch diese Aussage durch ein Beispiel illustrieren. Wir wissen bereits, dass die erste der Umnummerierungen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus des  $W_3$  ist, während  $\pi_2$  keinen Isomorphismus darstellt. Bei  $\pi_1$  werden offenbar nur die Indices 1 und 4 bzw. 5 und 8 vertauscht; bei  $\pi_2$  wird lediglich 1 mit 2 vertauscht. Vertauscht man in der Adjazenzmatrix  $A$  von  $W_3$  (vgl. Formel (\*) auf Seite 11) die entsprechenden Zeilen und Spalten (z.B. im Fall von  $\pi_2$  die erste und zweite Zeile sowie die erste und

zweite Spalte) so entstehen die Matrizen

$$A'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix  $A'_1$  unterscheidet sich nicht von  $A$  (d.h.  $\pi_1$  ist ein Isomorphismus), dagegen ist  $A'_2$  offenbar von  $A$  verschieden (z.B. besitzt  $A$  in Zeile 1 und Spalte 3 den Eintrag 1, während man bei  $A'$  an dieser Stelle eine 0 findet), womit noch einmal gezeigt ist, dass  $\pi_2$  kein Isomorphismus ist.

Mit dem in Satz 5 skizzierten Verfahren kann man die Isomorphismen eines beliebigen Graphen bestimmen (für  $W_3$  erhält man 48 verschiedene). Beim Würfel können wir die Isomorphismen aber noch direkt abzählen: Zunächst ordnen wir der Ecke 1 eine neue Nummer  $i$  zu (weil  $i$  eine Zahl zwischen 1 und 8 sein muss, haben wir hier acht Möglichkeiten). Dann werden die Nachbarecken von 1, also 2, 3, und 5, neu nummeriert. Wir müssen allerdings darauf achten, dass unsere Umnummerierung adjazenzhaltend bleibt, d.h. dass hier nur Nummern der Nachbarn von  $i$  verwendet werden dürfen: Haben wir uns beispielsweise für  $i = 4$  entschieden, so müssen die neuen Nummern für die Ecken 2,3 und 5 aus der Menge  $\{2, 3, 8\}$  gewählt werden. Hier ergeben sich sechs Möglichkeiten, nämlich

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt haben wir damit  $8 \cdot 6 = 48$  verschiedene adjazenzhaltende Nummerierungen der vier Ecken 1, 2, 3 und 5 gefunden. Wie man leicht nachprüft, sind damit aber bereits alle Isomorphismen erfasst, d.h. wir haben keinerlei Freiheit bei der Wahl neuer Nummern für die Ecken 4, 6, 7 und 8, weil Adjazenzen nicht verändert werden dürfen.

Die Aufgabe, aus den 384 Gerüsten des  $W_3$  die isomorphen zu eliminieren, kann mit diesen Werkzeugen gelöst werden: Ausgangspunkt ist eine Liste aller 384 Gerüste. Im ersten Schritt wird das erste dieser Gerüste umnummeriert — und zwar auf die 48 Arten, die die Isomorphismen des Würfels darstellen. Dadurch entstehen 48 isomorphe Gerüste, die wir (bis auf eines) aus unserer Liste streichen. Diese Prozedur wird mit dem zweiten (dritten usw.) Gerüst der Liste wiederholt bis alle Gerüste abgearbeitet sind. Da die Liste mit jedem Schritt kleiner wird, sind dazu keineswegs 384

Schritte erforderlich. Man kommt mit genau elf Schritten aus, d.h. es gibt elf nicht isomorphe Gerüste des  $W_3$ , eben die elf Grundmodule von Tobias Stengel.

Bei diesem Algorithmus zeigt sich, dass die elf Grundmodule unterschiedliche Symmetrieeigenschaften bezüglich des Würfels besitzen, denn keineswegs besitzt jeder Modul 48 *verschiedene* isomorphe Kopien (sonst müsste  $W_3$  insgesamt  $11 \cdot 48 = 528$  Gerüste besitzen): Auf nur fünf der elf Grundmodule trifft dies zu, die sechs anderen (sie sind in Abb. 2 mit „s“ für „symmetrisch“ gekennzeichnet) besitzen nur 24 verschiedene isomorphe Kopien (Probe:  $5 \cdot 48 + 6 \cdot 24 = 384$ ). Wie das möglich ist (und warum wir solche Module symmetrisch nennen), soll an einem weiteren Beispiel verdeutlicht werden: Die Umnummerierungen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

sind Isomorphismen des  $W_3$  (die erste entspricht einer Drehung, die zweite einer Spiegelung des Würfels). Abb. 10 zeigt ihren Effekt auf den ersten Modul aus Abb. 2 bzw. 6: Dieser Modul verändert sich unter  $\pi_1$  (wenn auch nicht wesentlich, man erhält natürlich einen isomorphen Modul), während er unter  $\pi_2$  stabil bleibt. Er ist, mit anderen Worten, invariant unter der durch  $\pi_2$  induzierten Spiegelung, also spiegelsymmetrisch.

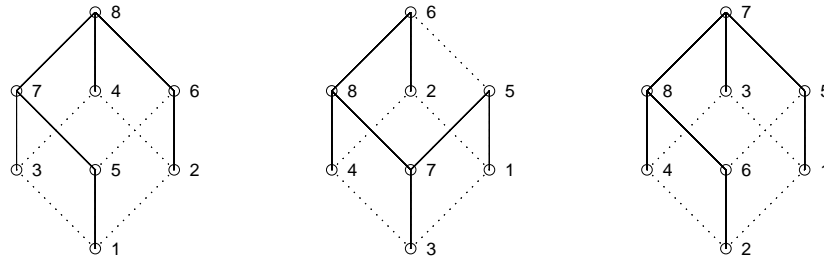


Abb. 10: Isomorphe und identische Gerüste

## 5 Der vierdimensionale Würfel

Der Berg (mathematischer Theorie) hat gekreißt und scheinbar eine Maus geboren: Tobias Stengel benötigte keine Graphentheorie, weder Matrizen noch Determinanten um herauszufinden, dass es genau elf Möglichkeiten gibt, den dreidimensionalen Würfel ins Zweidimensionale aufzuklappen. Wie universell die beschriebene Theorie ist, soll an einem Beispiel demonstriert werden, das sich (zumindest bis zu einem gewissen Grad) der Anschauung entzieht und ohne mathematischen Unterbau wohl nicht mehr zu lösen ist: Wir wollen den vierdimensionalen Würfel ins Dreidimensionale aufklappen.

Um zu verstehen, wie ein vierdimensionale Würfel „aussieht“, konstruieren wir zunächst Würfel kleinerer Dimension (vgl. Abb. 11). Der eindimensionale Würfel (kurz 1-D-Würfel) besitzt zwei Ecken, sagen wir 0 und 1, und eine Kante, die diese Punkte verbindet. Die Bezeichnungen der Ecken sind hier so gewählt, dass wir sie als Koordinaten auf einer  $x_1$ -Achse interpretieren können. (Beim 1-D-Würfel kommen wir natürlich mit einer Koordinate aus.) Die Ecken des 2-D-Würfels müssen durch zwei Koordinaten beschrieben werden: Wir wählen eine zweite Raumachse, die wir  $x_2$ -Achse nennen, und konstruieren zwei 1-D-Würfel, einen für  $x_2 = 0$  mit den Ecken  $(0, 0)$  und  $(1, 0)$  (in einer solchen Koordinatendarstellung verweist die erste Zahl immer auf die  $x_1$ -Koordinate, die zweite auf die  $x_2$ -Koordinate etc.), einen anderen für  $x_2 = 1$  mit den Ecken  $(0, 1)$  und  $(1, 1)$ . Verbindet man noch Ecken mit gleicher  $x_1$ -Koordinate, also  $(0, 0)$  mit  $(0, 1)$  und  $(1, 0)$  mit  $(1, 1)$ , so ist der 2-D-Würfel konstruiert. Beim 3-D-Würfel geht man genauso vor: Man wählt eine dritte Raumachse ( $x_3$ ), konstruiert zwei Kopien des 2-D-Würfels (für  $x_3 = 0$  und  $x_3 = 1$ ) und verbindet die Ecken durch eine Kante, deren  $x_1$ - und  $x_2$ -Koordinaten gleich sind.

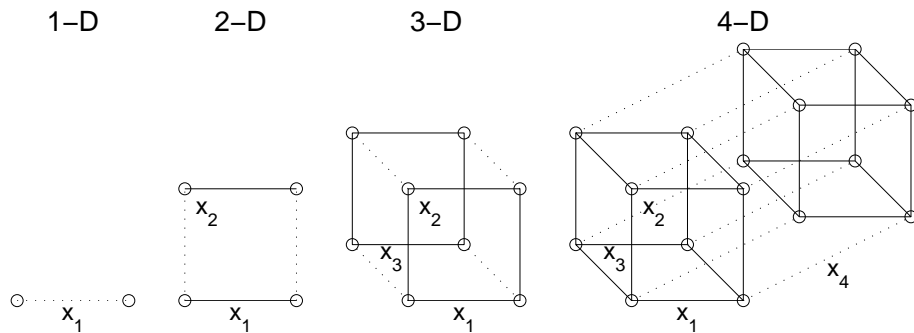


Abb. 11: Zur Konstruktion von Würfeln

Es spricht prinzipiell nichts dagegen, diesen Prozess ein weiteres Mal zu wiederholen und aus zwei Kopien eines 3-D-Würfels einen 4-D-Würfel zu erzeugen. Die einzige Schwierigkeit ist, dass wir uns diese Konstruktion nicht mehr bildlich vorstellen können, weil sich eine vierte Raumdimension bzw. eine vierte Koordinatenrichtung nicht anschaulich „begreifen“ lässt. Der 4-D-Würfel ist ein Graph  $W_4$  mit 16 Ecken, nämlich allen Punkten  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , wobei jede der Koordinaten  $x_i$  die Werte 0 und 1 annehmen darf, und 32 Kanten: Zwei Ecken sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich in genau einer ihrer vier Koordinaten unterscheiden. Z.B. liegen  $(0, 1, 1, 1)$  und  $(0, 1, 0, 1)$  auf einer Kante,  $(0, 1, 1, 1)$  und  $(0, 1, 0, 0)$  aber nicht.

Die Koordinatendarstellung der Ecken eines Würfels hat gewisse Vorteile gegenüber der simplen Nummerierung aus den vorigen Abschnitten:



Wie bereits mehrfach erwähnt, lassen sich Kanten einfach identifizieren: Sie verbinden Punkte, die sich in genau einer Koordinate unterscheiden. Fasst man Punkte zusammen, die sich in höchstens zwei Koordinaten unterscheiden, so erhält man beim 3-D-Würfel die sechs Quadrate, die die Oberfläche des Würfels bilden. Sämtliche Punkte mit  $x_3 = 1$ , also  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$  und  $(1, 1, 1)$ , spannen beispielsweise den „Deckel“ des 3-D-Würfels auf.

Wenn man beim 4-D-Würfel eine Koordinate fest vorschreibt (dazu gibt es acht Möglichkeiten, denn jetzt arbeiten wir in vier Koordinaten, wovon jede den Wert 0 oder 1 annehmen kann), so ergeben sich acht 3-D-Würfel, die zusammen die Oberfläche des 4-D-Würfels bilden. Deutlicher als in Abb. 11 sind diese 3-D-Oberflächenwürfel in der Darstellung des 4-D-Würfels aus Abb. 12 zu erkennen, die der mittleren Darstellung des  $W_3$  aus Abb. 3 entspricht.

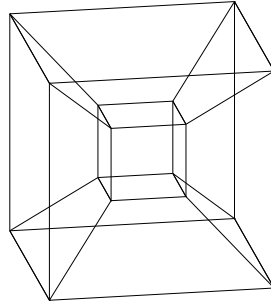


Abb. 12: Der vierdimensionale Würfel

Je zwei dieser acht 3-D-Würfel sind entweder nicht benachbart oder durch genau eine zweidimensionale Fläche verbunden. Jede solche Fläche besteht formal aus allen Ecken  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , die zwei gemeinsame Koordinaten besitzen. Wie man entweder leicht nachrechnet oder in Abb. 12 abzählt, gibt es 24 solcher Flächen. Schneidet man 17 von ihnen auf, so kann der 4-D-Würfel ins Dreidimensionale abgerollt werden. Das weitere Vorgehen ist bekannt: Der Matrix-Gerüst-Satz liefert die Existenz von 82944 Modulen des  $W_4$ . Wenn man mit Hilfe der 384 Isomorphismen des  $W_4$  die isomorphen Kopien entfernt, so bleiben 261 Grundmodule übrig, von denen sieben in Abb. 13 gezeigt werden.

Die Symmetrieeigenschaften dieser Module ist etwas komplexer als im dreidimensionalen Fall. Vier der 261 Module sind invariant unter genau 8 Isomorphismen und besitzen damit nur 48 verschiedene isomorphe Bilder (sie sind in der ersten Zeile von Abb. 13 zu sehen), vier weitere besitzen genau 96 verschiedene isomorphe Kopien (der erste Modul der zweiten Zeile gehört zu ihnen), 77 Module besitzen 192 solche Kopien (z.B. der zweite Modul der zweiten Zeile) und 177 sind schließlich völlig unsymmetrisch, d.h.

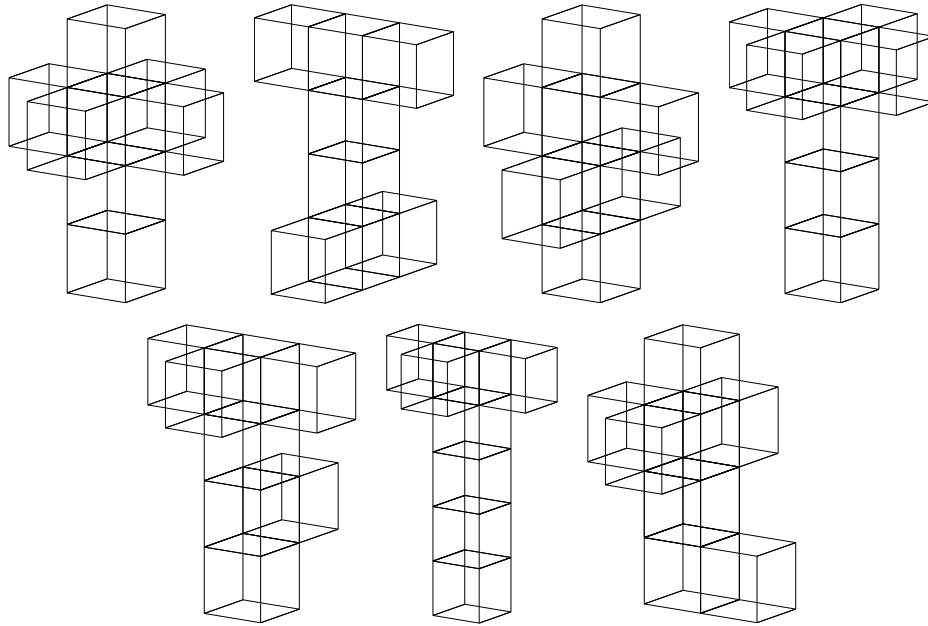


Abb. 13: Module des vierdimensionalen Würfels

sie besitzen 384 verschiedene isomorphe Bilder (wie der letzte der zweiten Zeile von Abb. 13).

## Literatur

- [1] Fiorez Kaderali and Werner Poguntke. *Graphen, Algorithmen, Netze: Grundlagen und Anwendungen in der Nachrichtentechnik*. Vieweg, Braunschweig, 1995.
- [2] Gustav Robert Kirchhoff. Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige. *Ann. Phys. Chem.*, 64:497–514, 1845.
- [3] Gustav Robert Kirchhoff. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. *Ann. Phys. Chem.*, 72:497–508, 1847.
- [4] Oleg Melnikov, Regina Tyshkevich, Vladimir Yemelichev, and Vladimir Sarvanov. *Lectures of Graph Theory*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1994.
- [5] Henry Martyn Mulder. *Die Entstehung der Graphentheorie*, S. 296–313. In [7], 1993.

- [6] James Joseph Sylvester. Chemistry and algebra. *Nature*, 17:284, 1878.
- [7] Klaus Wagner and Rainer Bodendieck. *Graphentheorie. Band 3: Zahlen, Gruppen, Einbettungen von Graphen und Geschichte der Graphentheorie*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1993.